DISTINGUIR E IDENTIFICAR ECUACIONES E IDENTIDADES

Nombre: Curso: Fecha:

IDENTIDADES Y ECUACIONES

Una **igualdad algebraica** está formada por dos expresiones algebraicas separadas por el signo igual (=).

- Una **identidad** es una igualdad algebraica que se verifica para cualquier valor de las letras.
- Una **ecuación** es una igualdad algebraica que no se cumple para todos los valores de las letras.

EJEMPLO

$\boldsymbol{x + x = 2x}$ es una identidad.

Se cumple la igualdad para cualquier valor numérico que tome x:

Para $x = 1 \rightarrow 1 + 1 = 2 \cdot 1 \rightarrow 2 = 2$

Para $x = -2 \rightarrow (-2) + (-2) = 2 \cdot (-2) \rightarrow -4 = -4$

$\boldsymbol{x + 4 = 10}$ es una ecuación. Solo se cumple cuando $x = 6 \rightarrow 6 + 4 = 10$.

ACTIVIDADES

1 Indica si las igualdades son identidades o ecuaciones.

a) $x + 8 = 2x - 15$

b) $2(x + 2y) = 2x + 4y$

c) $x + x + x = 3x$

d) $x^2 \cdot x^3 = x^5$

e) $2x + 1 = 11$

f) $\frac{x}{2} = 12$

SOLUCIÓN. ECUACIONES EQUIVALENTES

Las **soluciones** de una ecuación son los valores numéricos de la incógnita que hacen que la igualdad sea cierta. **Resolver** una ecuación es encontrar su solución.

- Dos o más **ecuaciones** son **equivalentes** cuando tienen las mismas soluciones.

  $x + 4 = 10$ y $2x = 12$ son ecuaciones equivalentes, ya que ambas tienen como solución $x = 6$.

  $6 + 4 = 10 \qquad 2 \cdot 6 = 12$

2 Para cada una de estas ecuaciones, escribe una ecuación equivalente y halla su solución.

Ecuación	Ecuación equivalente	Solución
$7 + x = 13$		
$x + 2 = 9$		
$2x = 14$		
$x - 4 = 4$		
$11 = 9 + x$		

RESOLVER ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Nombre: Curso: Fecha:

- Si a los dos miembros de una ecuación se les **suma o resta un mismo número** o expresión algebraica, se obtiene otra ecuación equivalente.
- Si a los dos miembros de una ecuación se les **multiplica o divide por un mismo número distinto de cero**, se obtiene otra ecuación equivalente.

EJEMPLO

Resuelve la ecuación $x - 4 = 10$.

Sumamos 4 en ambos miembros $\longrightarrow$ $x - 4 + 4 = 10 + 4$

$x = 14$

Resuelve la ecuación $x + 2x = 4 + 2x + 5$.

Restamos $2x$ en ambos miembros $\longrightarrow$ $x + 2x - 2x = 4 + 2x - 2x + 5$

$x = 4 + 5$

$x = 9$

Resuelve la ecuación $3x = 12$.

Dividimos ambos miembros entre 3 $\longrightarrow$ $\dfrac{3x}{3} = \dfrac{12}{3} \rightarrow x = 4$

Resuelve la ecuación $\dfrac{5x}{4} = 10$.

Multiplicamos por 4 ambos miembros $\longrightarrow$ $\dfrac{5x}{4} \cdot 4 = 10 \cdot 4 \rightarrow 5x = 40$

Dividimos ambos miembros entre 5 $\longrightarrow$ $\dfrac{5x}{5} = \dfrac{40}{5} \rightarrow x = 8$

ACTIVIDADES

1 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $3x = 15$

d) $2x + 6 = 20 + 6 + x$

b) $x + 6 = 14$

e) $2x + 4 = 16$

c) $-10 = -x + 3$

f) $-4x - 4 = -20 - x$

RESOLVER ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Nombre: Curso: Fecha:

2 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $2x - 5 = 3$

b) $x = -15 - 4x$

c) $x - 10 = 2x - 4$

d) $-x - 4 = 10$

e) $2x + 7 = x + 14$

f) $3x + 8 = 12 - x$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CON PARÉNTESIS

Resuelve la ecuación $2(x - 4) - (6 + x) = 3x - 4$.

Para resolver una ecuación es conveniente seguir estos pasos:

1.º Eliminamos paréntesis. $2x - 8 - 6 - x = 3x - 4$

2.º Agrupamos términos.

- Agrupamos los términos con x en el segundo miembro. $-8 - 6 = 3x - 4 - 2x + x$
- Agrupamos los términos numéricos en el primer miembro. $-8 - 6 + 4 = 3x - 2x + x$

3.º Reducimos términos semejantes. $-10 = 2x$

4.º Despejamos x y hallamos la solución. $\frac{-10}{2} = \frac{2x}{2} \rightarrow -5 = x$

3 Resuelve estas ecuaciones.

a) $4 - x = 2x + 3x - 5x$

b) $-10 - x + 3x = 2x + 4x + 2$

c) $2x - 9 = 3x - 17$

d) $3x + 8 - 5(x + 1) = 2(x + 6) - 7x$

e) $5(x - 1) - 6x = 3x - 9$

f) $3(3x + 1) - (x - 1) = 6(x + 10)$

RESOLVER ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Nombre: Curso: Fecha:

4 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $2(x - 5) = 3(x + 1) - 3$

d) $3(x + 2) + 4(2x + 1) = 11x - 2(x + 6)$

b) $4(x - 2) + 1 = 5(x + 1) - 3x$

e) $5(x - 4) + 30 = 4(x + 6)$

c) $3(x - 3) = 5(x - 1) - 6x$

f) $5(2 - x) + 3(x + 6) = 10 - 4(6 + 2x)$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CON DENOMINADORES

Resuelve la ecuación $\frac{2x-1}{3} = \frac{x-3}{2} + \frac{3x-7}{4}$.

Para resolver una ecuación con denominadores es conveniente seguir estos pasos:

1.º Eliminamos denominadores.

$$\text{m.c.m. } (3, 2, 4) = 3 \cdot 2^2 = 12$$

$$12 \cdot \frac{2x-1}{3} = 12 \cdot \frac{x-3}{2} + 12 \cdot \frac{3x-7}{4}$$

$$4(2x - 1) = 6(x - 3) + 3(3x - 7)$$

2.º Eliminamos paréntesis.

$$8x - 4 = 6x - 18 + 9x - 21$$

3.º Agrupamos términos.

- Agrupamos los términos con x en el segundo miembro.

$$-4 = 6x - 18 + 9x$$

- Agrupamos los términos numéricos en el primer miembro.

$$-4 + 18 + 21 = 6x + 9x - 8x$$

4.º Reducimos términos semejantes.

$$35 = 7x$$

5.º Despejamos x y hallamos la solución.

$$\frac{35}{7} = \frac{7x}{7} \rightarrow x = 5$$

RESOLVER ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Nombre: Curso: Fecha:

5 Halla la solución de estas ecuaciones.

a) $\frac{x-1}{4} - \frac{12-2x}{5} = \frac{x-2}{5}$

b) $\frac{3x-7}{12} - \frac{2x-3}{6} = \frac{x-1}{8}$

c) $\frac{x+4}{3} - \frac{x-4}{5} = 2 + \frac{3x-1}{15}$

d) $5 - \frac{x-2}{4} = 4 + \frac{x-3}{2}$

e) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6} = 30$

f) $\frac{x-2}{2} + \frac{x-3}{3} + \frac{x-4}{4} = 10$

g) $\frac{x-4}{5} + \frac{x+3}{6} - \frac{x-6}{3} = 1 + \frac{x-7}{2}$

h) $2\left(\frac{x}{3} + 5\right) = \frac{2x}{4} + 4$

i) $\frac{x-3}{6} = 2 - \frac{5(x+3)}{12}$

j) $\frac{3(x+5)}{4} + \frac{-7(x+3)}{10} = 4$

RESOLVER ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Nombre: Curso: Fecha:

ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Una **ecuación de segundo grado** es una igualdad algebraica del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, donde:

- a, b y c son los **coeficientes** de la ecuación, siendo $a \neq 0$.
- $ax^2 \rightarrow$ **término cuadrático** $bx \rightarrow$ **término lineal** $c \rightarrow$ **término independiente**
- x es la **incógnita**.

ACTIVIDADES

1 Escribe la expresión general de estas ecuaciones de segundo grado.

a) $(x - 1)(x + 4) = 1 \rightarrow x^2 + 4x - x - 4 = 1 \rightarrow x^2 + 3x - 4 - 1 = 0 \rightarrow x^2 + 3x - 5 = 0$

b) $2x(3x + 5) = -1 + 4x$

c) $x - 5x^2 + 8 = -3x^2 - x - 3$

2 Identifica los coeficientes de las ecuaciones de segundo grado del ejercicio anterior.

a) $x^2 + 3x - 5 = 0 \rightarrow a = 1, b = 3, c = -5$

c)

b)

FÓRMULA GENERAL PARA LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Una ecuación de segundo grado puede tener **dos, una o ninguna solución**.

Para obtener las soluciones de una ecuación de segundo grado se aplica la siguiente fórmula:

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow \boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$$

EJEMPLO

Resuelve la ecuación de segundo grado $x^2 + 5x + 6 = 0$.

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-5 + 1}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2 \\ x_2 = \dfrac{-5 - 1}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

Sustituyendo los valores -2 y -3 en la ecuación $x^2 + 5x + 6 = 0$, se comprueba que la cumplen:

$(-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 6 = 0 \rightarrow 4 - 10 + 6 = 0 \rightarrow 10 - 10 = 0 \rightarrow 0 = 0$

$(-3)^2 + 5 \cdot (-3) + 6 = 0 \rightarrow 9 - 15 + 6 = 0 \rightarrow 15 - 15 = 0 \rightarrow 0 = 0$

RESOLVER ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Nombre: Curso: Fecha:

3 Resuelve estas ecuaciones de segundo grado.

a) $x^2 + 4x + 3 = 0$

d) $7x^2 + 21x = 28$

b) $x^2 - 6x + 8 = 0$

e) $3x^2 + 6 = -9x$

c) $2x^2 - 5x - 7 = 0$

f) $(2x - 4)(x - 1) = 2$

4 Resuelve las ecuaciones y comprueba que las soluciones verifican la ecuación.

a) $x^2 + 2x - 8 = 0$

b) $3x^2 - 6x - 9 = 0$

c) $2x^2 - 7x + 3 = 0$

RESOLVER ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Nombre: Curso: Fecha:

ECUACIONES DEL TIPO $ax^2 + c = 0$

Las ecuaciones de la forma $\mathbf{ax^2 + c = 0}$ se consideran ecuaciones de segundo grado.
Son ecuaciones del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, donde $b = 0$.

Para resolverlas se sigue este proceso:

$$\mathbf{ax^2 + c = 0} \rightarrow ax^2 = -c \rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

- Si el **radicando** es **positivo**, hay dos soluciones opuestas: $x_1 = +\sqrt{\frac{-c}{a}}$ y $x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$
- Si el **radicando** es **negativo**, no hay solución.

EJEMPLO

$$2x^2 - 32 = 0 \rightarrow 2x^2 = 32 \rightarrow x^2 = \frac{32}{2} \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = \pm\sqrt{16} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

$$3x^2 + 75 = 0 \rightarrow 3x^2 = -75 \rightarrow x^2 = \frac{-75}{3} \rightarrow x^2 = -25 \rightarrow x = \pm\sqrt{-25} \rightarrow \text{No tiene solución}$$

5 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $7x^2 - 28 = 0$

b) $5x^2 - 180 = 0$

c) $5x^2 = 45$

d) $18x^2 - 72 = 0$

6 Indica por qué no tienen solución estas ecuaciones.

a) $x^2 + 4 = 0$

b) $2x^2 = -18$

c) $9x^2 - 5x + 18 = -18 - 5x$

d) $3(x^2 + x) = 3x - 12$

e) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4} = 0$

f) $\frac{x^2 + 7}{3} = 2$

RESOLVER ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Nombre: Curso: Fecha:

ECUACIONES DEL TIPO $ax^2 + bx = 0$

Las ecuaciones de la forma $\mathbf{ax^2 + bx = 0}$ se consideran ecuaciones de segundo grado.
Son ecuaciones del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, donde $c = 0$.

Para resolverlas se sigue este proceso:

$$\mathbf{ax^2 + bx = 0} \xrightarrow{\text{Factor común } x} x(ax + b) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ ax + b = 0 \rightarrow x_2 = \dfrac{-b}{a} \end{cases}$$

Estas ecuaciones tienen siempre dos soluciones, siendo cero una de ellas.

EJEMPLO

$$x^2 - 12x = 0 \rightarrow x(x - 12) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x - 12 = 0 \rightarrow x_2 = \dfrac{-b}{a} \end{cases}$$

$$2x^2 + 5x = 0 \rightarrow x(2x + 5) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x + 5 = 0 \rightarrow 2x = -5 \rightarrow x_2 = \dfrac{-5}{2} \end{cases}$$

7 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $5x^2 + 5x = 0$

b) $2x^2 - 8x = 0$

c) $6x^2 = 30x$

d) $-5x^2 + 20x = 0$

8 Halla la solución de estas ecuaciones.

a) $25x^2 - 100x = 0$

b) $5x - 4x^2 = 0$

c) $x - x^2 = 0$

d) $-4x^2 + 16x = 0$

e) $x(x - 3) + 8 = 4(x + 2)$

f) $\dfrac{x(x-1)}{2} = \dfrac{2x^2+3}{3}$

RESOLVER PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Nombre: Curso: Fecha:

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Para resolver un problema utilizando ecuaciones de primer grado es conveniente seguir estos pasos:

1.º Identificamos la incógnita. Es necesario distinguir los datos conocidos y el dato desconocido, es decir, la incógnita.

2.º Planteamos la ecuación. Hay que expresar las condiciones del enunciado en forma de ecuación: la correspondencia entre los datos y la incógnita.

3.º Resolvemos de la ecuación. Se obtiene el valor de la incógnita resolviendo la ecuación.

4.º Comprobamos e interpretamos la solución. Se debe comprobar si la solución verifica el enunciado e interpretar la solución en el contexto del problema.

EJEMPLO

Ana tiene 2 € más que Berta, Berta tiene 2 € más que Eva y Eva tiene 2 € más que Luisa. Entre las cuatro amigas tienen 48 €. Calcula la cantidad de dinero que tiene cada una.

1.º Identificamos la incógnita.
Tomamos como dato desconocido el dinero que tiene Luisa.

2.º Planteamos la ecuación.
Dinero de Luisa $\rightarrow$ x

Las restantes cantidades de dinero las escribimos en función de x:

Dinero de Eva $\longrightarrow$ 2 € más que Luisa $\longrightarrow$ $x + 2$
Dinero de Berta $\longrightarrow$ 2 € más que Eva $\longrightarrow$ $(x + 2) + 2 = x + 4$
Dinero de Ana $\longrightarrow$ 2 € más que Berta $\longrightarrow$ $(x + 4) + 2 = x + 6$

Escribimos la condición de que la suma de las cantidades es 48 €.

$$x + (x + 2) + (x + 4) + (x + 6) = 48$$

3.º Resolvemos la ecuación.

$$x + (x + 2) + (x + 4) + (x + 6) = 48 \rightarrow 4x + 12 = 48 \rightarrow 4x = 48 - 12$$
$$\rightarrow 4x = 36 \rightarrow x = \frac{36}{4} = 9 \rightarrow \text{Luisa tiene } 9\text{ €.}$$

Eva tiene: $9 + 2 = 11$ € Berta tiene: $9 + 4 = 13$ € Ana tiene: $9 + 6 = 15$ €

4.º Comprobamos e interpretamos la solución.
Las cantidades que tienen las amigas: 9, 11, 13 y 15 € cumplen las condiciones del enunciado.

$$9 + 11 + 13 + 15 = 48$$

ACTIVIDADES

1 La suma de tres números consecutivos es 30. Hállalos.

2 La suma de un número, su doble y su triple es 66. ¿Cuál es el número?

Nombre: Curso: Fecha:

ACTIVIDADES

1 Investiga qué relación debe existir entre b y c para que las soluciones de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ sean iguales.
Basándote en tus investigaciones, escribe una ecuación de segundo grado cuyas dos soluciones sean 7.
¿Es posible que si b y c son números enteros y b es impar sean las dos soluciones iguales?

2 Encuentra el error y recuerda que «2 no es igual a1».

$$x = y \xrightarrow{\cdot x} x^2 = xy \xrightarrow{-y^2} \overbrace{x^2 - y^2}^{\text{Diferencia de cuadrados}} = \overbrace{xy - y^2}^{\text{Factor común: } y} \rightarrow (x + y)(x - y) = y(x - y)$$

$$\xrightarrow{:(x = y)} x + y = y \xrightarrow{\text{como } x = y} y + y = y \rightarrow 2y = y \xrightarrow{:y} 2 = 1$$

SOLUCIÓN DE LA FICHA PROFUNDIZACIÓN

1 Investiga qué relación debe existir entre *b* y *c* para que las soluciones de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ sean iguales.

Basándote en tus investigaciones, escribe una ecuación de segundo grado cuyas dos soluciones sean 7.

¿Es posible que si *b* y *c* son números enteros y *b* es impar sean las dos soluciones iguales?

Para que las soluciones sean iguales, tenemos que:

$$\sqrt{b^2 - 4c} = 0 \rightarrow b^2 - 4c = 0 \rightarrow b^2 = 4c$$

Una posible ecuación con 7 como solución doble es: $x^2 - 14x + 49 = 0$

Si *b* y *c* son números enteros y *b* es impar no puede existir una solución doble, ya que b^2 sería impar y como $4c$ es par, las soluciones no serían iguales.

2 Encuentra el error y recuerda que «2 no es igual a1».

$$x = y \xrightarrow{\cdot\, x} x^2 = xy \xrightarrow{-y^2} \overbrace{x^2 - y^2}^{\text{Diferencia de cuadrados}} = \overbrace{xy - y^2}^{\text{Factor común: } y} \rightarrow$$

$$\rightarrow (x + y)(x - y) = y(x - y)$$

$$\xrightarrow{:(x = y)} x + y = y \xrightarrow{\text{como } x = y} y + y = y \rightarrow$$

$$\rightarrow 2y = y \xrightarrow{:y} 2 = 1$$

El error está en el paso en el que dividimos los términos entre $(x - y)$, ya que $x - y = 0$ y, además, no podemos dividir entre 0.